

APLICACIONES DE LA VERSION P-ADAPTABLE DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN EL ANALISIS DE MEDIOS CONTINUOS

MIGUEL CERROLAZA*

y

ENRIQUE ALARCON**

**Instituto de Materiales y Modelos Estructurales
Universidad Central de Venezuela
Aptdo. Postal 50361, Sabana Grande, CARACAS
VENEZUELA*

***Departamento de Mecánica Estructural y
Construcciones Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
c/Gutierrez Abascal, 2
28006 MADRID
ESPAÑA*

RESUMEN

Este trabajo está dedicado a la presentación y discusión de los resultados obtenidos al aplicar la versión p-adaptable del Método de los Elementos de Contorno (MEC) a problemas de elastostática bidimensional. Se describen brevemente algunos criterios básicos inherentes al desarrollo e implementación de la versión p-adaptable del MEC. Se presentan y discuten algunos ejemplos ilustrativos con singularidades producidas por cambios repentinos en la geometría y las condiciones de contorno, los cuales demuestran la potencia y versatilidad de la técnica p-adaptable propuesta.

SUMMARY

This work deals with the presentation and discussion of the numerical results obtained when the p-adaptive BEM version is applied to elastostatics problems. The basic criteria needed in the development and implementation of the BEM p-version are briefly discussed. Some numerical examples which display geometric singularities as well as those due to sudden changes in boundary conditions are included in order to assess the reliability and flexibility of the method proposed herein.

Recibido: Abril 1988

INTRODUCCION

En artículos previos^{1,2,8,9} los autores han desarrollado y presentado las herramientas matemáticas necesarias para implementar la versión p-adaptable del Método de los Elementos de Contorno (MEC). La combinación de las ventajas propias de los métodos integrales de contorno y el éxito obtenido en el desarrollo de técnicas auto-adaptables en el Método de los Elementos Finitos (MEF)^{3,12,13,17,26} ha demostrado ser sumamente atractiva en el análisis de problemas de potencial y elastostática. El lector interesado en un extenso compendio sobre las versiones auto-adaptables en el MEF puede consultar la referencia 5.

Rank¹⁹ y Rencis y Mullen²² han utilizado con éxito la versión h-adaptable del MEC en problemas de elastostática bidimensional. Por otro lado, Parreira¹⁵ y Rank²⁰ han presentado una versión p-adaptable en elastostática 2-D. Sin embargo, estos autores utilizan elementos de frontera rectos e integración analítica de las funciones singulares, lo cual disminuye considerablemente la versatilidad del método al no poderse contemplar contornos curvilíneos. Adicionalmente, la evaluación analítica de las integrales singulares en el sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC) se traduce, habitualmente, en pérdida de generalidad del método, razón por la cual los códigos MEC actualmente disponibles en la literatura técnica efectúan las integraciones en forma numérica.

Por todo ello, en este trabajo se ha optado por trabajar sobre elementos de frontera no rectos de nudos variables. Las integrales derivadas de la colocación de la solución fundamental y la evaluación de los parámetros que gobiernan el proceso p-adaptable se realizan en forma enteramente numérica, de acuerdo a un algoritmo especialmente desarrollado para evaluar integrales singulares en el sentido de VPC^{10,11}.

RESUMEN DE LA FORMULACION CLASICA DEL M.E.C.

Una de las grandes ventajas del MEC radica en que las variables incógnita son interpoladas solamente sobre la frontera del problema en estudio, consiguiéndose así la reducción en un orden de la dimensionalidad del cuerpo a analizar ($3 - D \rightarrow 2 - D$; $2 - D \rightarrow 1 - D$). Para ello, es necesario disponer de una relación entre las variables conocidas y las incógnitas sobre el contorno, la cual se denomina "identidad de Somigliana" y se expresa por (ignorando las fuerzas de dominio):

$$C(P) \cdot u(P) + \int_{\Gamma} T^*(P, Q) \cdot u(Q) \cdot d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U^*(P, Q) \cdot t(Q) \cdot d\Gamma(Q) \quad (1)$$

La expresión anterior constituye una relación de reciprocidad entre el estado actual de tracciones $t(Q)$ sobre la frontera Γ , el estado de desplazamientos $u(Q)$ también sobre la frontera Γ , y una solución fundamental definida por una carga unitaria concentrada aplicada en un punto $P \in \Gamma$. Tal solución queda caracterizada por los tensores $T^*(P, Q)$ y $U^*(P, Q)$. $C(P)$ es un tensor geométrico que depende de la

geometría de la frontera Γ en el entorno de P . El lector interesado en los detalles de la formulación puede consultar, por ejemplo, la referencia 6.

La interpretación de los tensores $\mathbf{T}^*(P, Q)$ y $\mathbf{U}^*(P, Q)$ como funciones de ponderación de tipo global, permite la interpolación de las variables incógnita $u(Q)$ y $t(Q)$ utilizando las técnicas clásicas de los métodos proyectivos. El estado de tracciones y desplazamientos sobre la frontera Γ del dominio es caracterizado por

$$\begin{aligned} u(Q) &= \bar{u}(Q) & Q \in \Gamma_u \\ t(Q) &= \bar{t}(Q) & Q \in \Gamma_t \\ u(Q) &= ? & Q \in \Gamma_t \\ t(Q) &= ? & Q \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (2)$$

donde Γ_u y Γ_t expresan frontera cinemática y frontera estática, respectivamente y $\bar{u}(Q)$ y $\bar{t}(Q)$ representan las variables conocidas sobre su correspondiente frontera. Así pues, la discretización de la frontera Γ en elementos de contorno y la interpolación de los campos de variables desconocidas conducen a la conocida relación matricial

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (3)$$

en la cual ya se han impuesto las condiciones de contorno apropiadas. \mathbf{X} colecciona los campos de variables desconocidas, mientras que \mathbf{A} y \mathbf{F} representan la ordenación de los coeficientes de influencia del problema, usualmente calculados a través de técnicas de integración numérica^{10,24,25}.

La versión clásica del MEC se basa en criterios de interpolación isoparamétrica y en una discretización suficientemente fina de la frontera, capaz de recoger los estados locales de los campos de variables. Así, pues, un mismo conjunto de puntos definidos sobre la frontera Γ es utilizado para: a) definir los elementos de la discretización; b) soporte de las funciones de interpolación locales; c) definir las condiciones de contorno sobre la frontera y d) como puntos de colocación de la solución fundamental para escribir las ecuaciones integrales.

En los apartados siguientes se propondrá una nueva versión del MEC, la versión p-adaptable, que si bien se inscribe dentro de la formulación arriba presentada, permite separar adecuadamente la interpolación de las variables conocidas y desconocidas, realizando esta última de una manera auto-adaptable.

ALGUNOS CRITERIOS ESENCIALES EN LA VERSION P-ADAPTABLE DEL MEC

Como es conocido, las ventajas de las técnicas auto-adaptables radican, básicamente, en: a) la posibilidad de discretizar el contorno con macroelementos compatibles con la geometría y las condiciones de contorno, reduciendo así el esfuerzo

humano en la preparación de los datos y b) la estimación del error cometido en la solución numérica.

En la versión p-adaptable del MEC el primer paso consiste en la elección de una malla "base" relativamente gruesa, que satisfaga los requisitos impuestos por la geometría de la frontera y las condiciones de contorno. Sobre esta malla "base" se efectuarán los refinamientos polinómicos posteriores.

A continuación, se debe seleccionar una familia de funciones p-jerárquicas adecuada. En nuestro caso, se ha optado por trabajar con la familia de Legendre, véase por ejemplo¹², dado que ésta es la que produce el mejor condicionamiento de la matriz de influencia del sistema.

El atractivo de utilizar funciones p-jerárquicas radica en que la adición de nuevos polinomios de orden superior, definidos sobre una base común, va produciendo sistemas de ecuaciones "orlados". Es decir los coeficientes de influencia calculados en iteraciones anteriores son aprovechados en su totalidad, sin desperdiciarse por tanto esfuerzo computacional alguno¹. Mas aún, los términos de la matriz de coeficientes se debilitan en la medida en que se alejan de la diagonal, lo cual conduce a un apropiado condicionamiento del sistema de ecuaciones y sugiere el empleo de métodos iterativos (Gauss-Jordan, Gradiente Conjugado) para su solución.

Por otro lado, la introducción de nuevas funciones de interpolación presupone la elección de nuevos puntos para colocar la solución fundamental. Este conjunto de puntos debe escogerse de tal manera que satisfaga básicamente, los criterios siguientes^{8,9}: a) tan lejos como sea posible de puntos de colocación previos para evitar el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones y b) la nueva ecuación debe reforzar el elemento diagonal de la matriz de influencia.

Los criterios para evaluar el error cometido en la solución aproximada son, indudablemente, la piedra angular de las técnicas auto-adaptables en cualquier método. Así pues, es necesario disponer de indicadores locales y estimadores globales del error para poder decidir sobre aspectos tan delicados como son "dónde" y "cómo" refinar la malla base. Un breve resumen de tales criterios matemáticos se da en los párrafos siguientes.

INDICADORES LOCALES Y ESTIMADOR GLOBAL

Se incluye en este apartado un breve compendio de las fórmulas obtenidas por los autores para la evaluación del error cometido en la solución numérica auto-adaptable. El lector interesado en los detalles teóricos puede consultar las referencias^{1,2,9,11}.

El indicador local de error que gobierna el proceso de refinamiento tiene la expresión

$$\|e\|_{kj}^2 = \frac{\left[\int_{s_k} N_j^{n+1}(Q) r_j(Q) ds(Q) \right]^2}{\int_{s_k} N_j^{n+1}(Q) L_j(P, Q) N_j^{n+1}(Q) ds(Q)} \quad (4)$$

donde

k = elemento sobre el cual se refina en la etapa en curso

- j = variable que se refina en la etapa en curso
 r_j = función residuo obtenida sobre el elemento k
 N_j^{n+1} = nueva función de interpolación a introducir
 L_j = operador integral vectorial basado en la identidad de Somigliana

La expresión (4) permite determinar cuales variables y sobre cuales elementos se deben refinar, de forma de obtener el mayor grado de precisión con el menor número de nuevas funciones introducidas sobre los grados de libertad más comprometidos en la convergencia del método.

La función residuo r puede ser escrita como

$$r(P) = c(P) [\hat{u}(P) - u^{\text{comp}}(P)] \quad (5)$$

donde c es la matriz que depende de la geometría en el entorno del punto de colocación⁶, \hat{u} es la solución obtenida mediante la interpolación de los valores actuales sobre puntos en el interior de los elementos que se refinan y u^{comp} son los valores computados obtenidos al colocar la solución fundamental también en puntos interiores de los elementos que se refinan.

Finalmente, el valor del estimador global del error se calcula mediante la norma H_0 de Hilbert (véase por ejemplo Reddy²¹) la cual tiene la forma

$$\|E\|_0 = \left[\int_s \sum_{i=1}^{Nd} r_i^2(P) ds(P) \right]^{1/2} \quad (6)$$

donde ahora la integral en (6) se extiende sobre toda la frontera y Nd es la dimensionalidad del problema estudiado ($Nd = 1, 2, 3$ en problemas de potencial, elastostática 2-D y elastostática 3-D, respectivamente).

La característica particular que presenta la función residuo r de anularse en todos aquellos puntos donde se ha colocado previamente una función de interpolación jerárquica sugiere inmediatamente la posibilidad de su evaluación numérica mediante las cuadraturas de Lobatto (véase Stroud y Secrest²⁴). Estas cuadraturas, como es sabido, integran numéricamente una función conociéndose sus valores en los extremos del intervalo de integración. Considerando entonces que $r_i(\xi = -1) = 0$ y que $r_i(\xi = 1) = 0$ se puede escribir que

$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{Nd} r_i^2 \right) J(\xi) d\xi \simeq \sum_{j=2}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{Nd} r_i^2(\xi_j) \right) J(\xi_j) \omega_j \quad (7)$$

donde las ξ_j y ω_j son las abscisas y los coeficientes de ponderación de Lobatto. Nuestra experiencia ha demostrado que un valor de $N = 5$ es suficientemente preciso para fines prácticos en el MEC p-adaptable, requiriéndose por tanto la evaluación de la función residuo en sólo 3 puntos del intervalo de integración.

El jacobiano J se refiere ahora al segmento sobre el cual se integra, el cual no tiene que coincidir necesariamente con el elemento refinado¹¹.

Otro punto de suma importancia es el referido a la evaluación numérica de integrales cuasi-singulares y singulares en el sentido de VPC que usualmente aparecen en métodos integrales de contorno. Más aún, en la versión p-adaptable del MEC, dado el gran tamaño de los elementos con que se discretiza la frontera, los valores de estas integrales son absolutamente determinantes en la precisión del método. Las integrales cuasi-singulares, es decir, aquellas en las que el punto de colocación de la solución fundamental está muy próximo al elemento que se integra, presentan considerables problemas de precisión si no se toman precauciones especiales. Telles²⁵ ha desarrollado una transformación no-lineal que agrupa los puntos de integración cerca del punto de colocación obteniendo resultados satisfactorios, por lo cual se ha incorporado a las rutinas de integración numérica utilizadas en esta investigación.

En el caso de integrales singulares en el sentido de VPC, es decir, aquellas integrales en las que el punto de colocación está contenido dentro del elemento sobre el cual se integra, los autores han desarrollado una transformación no-lineal bicúbica^{10,11} para evaluar tales integrales y que atiende primordialmente a la definición teórica de VPC. Esta transformación proporciona resultados altamente precisos con un número razonable de puntos de integración, aún en la presencia de elementos de longitud muy desigual concurriendo a un mismo vértice. Adicionalmente, no requiere prácticamente de cambios en las rutinas de integración de los códigos MEC disponibles y utiliza las reglas standard de cuadratura de Gauss-Legendre²⁴.

CASOS ESTUDIADOS: ANALISIS Y DISCUSION

Se presentan a continuación tres ejemplos ilustrativos de la capacidad de la versión p-adaptable del MEC en elastostática, los cuales incluyen singularidades derivadas de cambios abruptos en la geometría y las condiciones de contorno.

Placa en "L"

La Figura 1.a ilustra una placa en forma de *L* sometida a tracciones en uno de sus lados, con sus dimensiones y condiciones de contorno, mientras que la Figura 1.b recoge la discretización "base" utilizada para el análisis p-adaptable definida con seis elementos identificados en círculos. El interés de este ejemplo radica justamente en la singularidad geométrica que aparece en la esquina *A*, donde los campos de tensiones muestran una tendencia hacia valores infinitos¹².

Este problema fue analizado con una malla de 120 elementos lineales, uniformemente distribuidos (20 elementos/lado) y mediante el refinamiento p-adaptable aquí propuesto. La Figura 2 recoge los valores de la tensión σ_1 calculados sobre la línea vertical $x_1 = 0.5$.

La línea gruesa representa la evolución de las tensiones obtenida con la solución de 120 elementos, mientras que las líneas con símbolos muestran los valores de la tensión en diferentes etapas del refinamiento. Como puede observarse, la interpolación cuártica sobre la malla "base" produce resultados altamente satisfactorios al ser comparada con la solución de 120 elementos.

Los resultados obtenidos al analizar la convergencia global del problema se

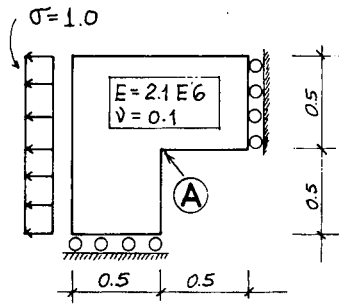


Figura 1.a Geometría y condiciones de contorno. Placa en L.

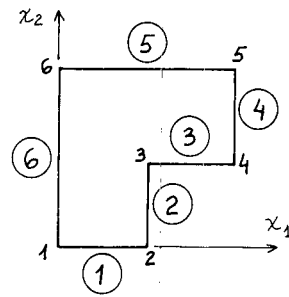


Figura 1.b Discretización "base" de placa en L.

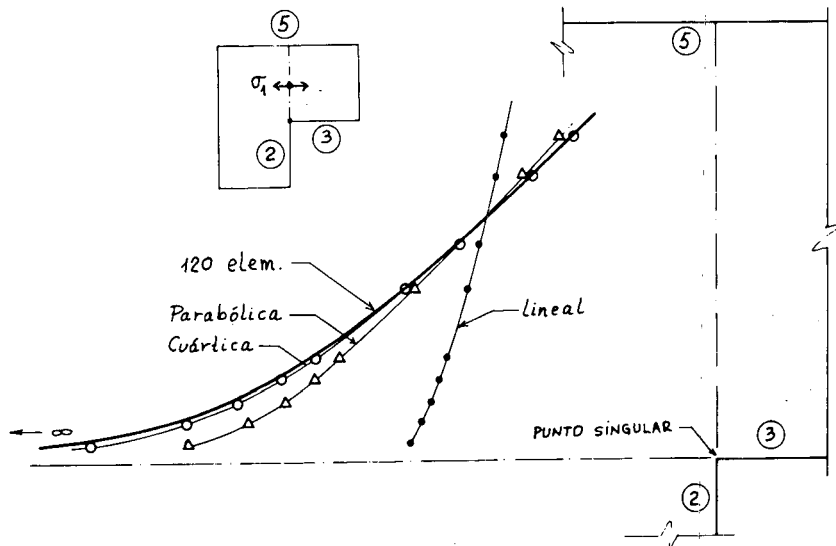


Figura 2. Tensiones en $x_1 = 0.5$. Placa en L.

muestran en la Figura 3. Se practicó un análisis mediante refinamiento h-completo (6, 12, 24, ...elementos), el cual proporciona una velocidad de convergencia de 0.70. La velocidad de convergencia p-adaptable (línea con círculos) resultó ser de 2.0, es decir, 2.87 veces más rápida que la convergencia h-completa (línea con triángulos). La convergencia p-completa (introducción indiscriminada de todas las nuevas funciones de interpolación en cada etapa) produce una velocidad 1.60 veces mayor que la h-completa, pero inferior a la p-adaptable. Este hecho demuestra la importancia de disponer de criterios de selectividad apropiados que permitan decidir cuales nuevas funciones son más efectivas que otras.

Este ejemplo también muestra que las singularidades de tipo geométrico (que no involucren cambios repentinos en las condiciones de contorno) pueden ser efectivamente tratadas con refinamientos de tipo p . Como puede ser notado en la figura 1.b, el entorno del punto singular A sólo está acotado por dos macroelementos, no siendo necesario definir elementos más pequeños para recoger los efectos de la concentración de tensiones en el punto singular.

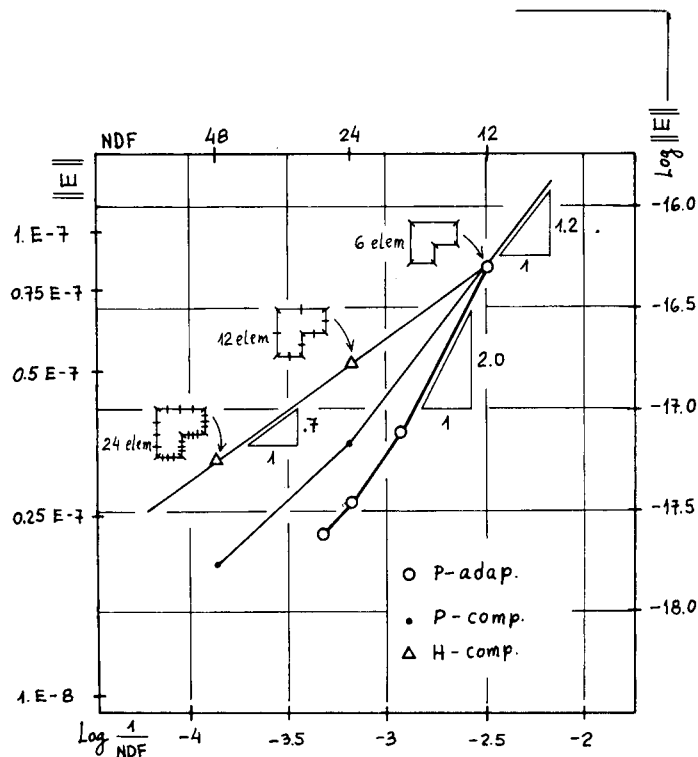


Figura 3. Comparación de velocidades de convergencia. Placa en L .

Ménsula corta

Se estudian aquí las velocidades de convergencia correspondientes a una ménsula corta ilustrada en la Figura 4. La Figura 4.a muestra las condiciones de contorno y dimensiones de la placa, mientras que la Figura 4.b recoge una de las discretizaciones "base" utilizadas en el análisis p-adaptable.

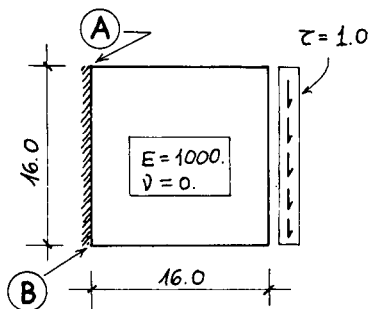


Figura 4.a Geometría y condiciones de contorno. Ménsula corta.

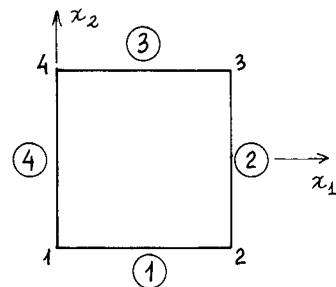


Figura 4.b Discretización "base". Ménsula corta.

La solución de la ménsula fue obtenida a través de un modelo de 128 elementos lineales uniformemente distribuidos (32 elementos/lado). El cambio en las condiciones de contorno en los extremos del empotramiento provoca la aparición de los puntos

singulares A y B (ver Figura 4.a), en los cuales los campos de tensiones tienden a infinito.

Para analizar este ejemplo fueron utilizadas tres mallas "base"; una malla A de cuatro elementos, una malla C de ocho elementos obtenida al subdividir en dos todos los elementos de la malla A y una malla B constituida por seis elementos, dos de los cuales con dimensión muy reducida y colocados en la vecindad de los puntos singulares (Figura 5). Asimismo, a este ejemplo se le practicó un refinamiento h-completo subdividiendo la malla A en 8, 16, 32 elementos sucesivamente.

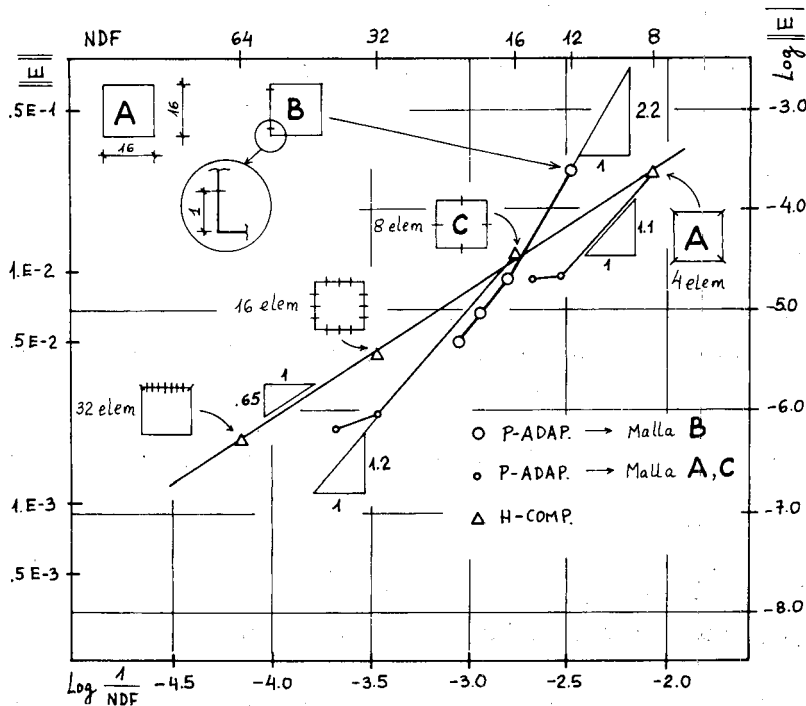


Figura 5. Comparación de velocidades de convergencia. Ménsula corta.

En la Figura 5 se comparan las velocidades de convergencia obtenidas en ambos tipos de refinamiento h-completo y p-adaptable, observándose que el refinamiento parabólico p-adaptable sobre las mallas A y C produce un valor de 1.1, el cual es aproximadamente 1.70 veces mayor que el de la convergencia h-completa. Sin embargo, se puede apreciar que la etapa cúbica del refinamiento p-adaptable en las citadas mallas produce valores bastante menores que los de la etapa parabólica. Este hecho refleja la dificultad de representar adecuadamente recintos con singularidades fuertes mediante refinamientos de tipo p , como también ha sido notado por Parreira¹⁵ y Rank²⁰.

El remedio a esta situación se obtiene colocando un elemento de dimensión reducida en la vecindad del punto singular lo cual, naturalmente, requiere cierto conocimiento por parte del analista acerca del problema en estudio cuando se defina la discretización "base". La utilidad de estos elementos pequeños adyacentes a la singularidad consiste en que permiten el adecuado desarrollo del valor singular sin afectar sustancialmente el comportamiento del refinamiento p-adaptable en los elementos conectados a ellos.

Así, la malla B ilustrada en la Figura 5 está definida por seis elementos, dos de ellos en la vecindad de los puntos singulares. Nótese que sólo es necesario definir elementos pequeños en el lado de la singularidad donde se espera el desarrollo del valor singular. Esto es posible realizarlo gracias a la aplicación de nuevas fórmulas de integración numérica¹⁰, las cuales evalúan correctamente integrales singulares en el sentido de VPC, aún en la presencia de elementos de longitud muy desigual a ambos lados de un punto de colocación.

En la Figura 5 se puede apreciar la mejora sustancial obtenida en la velocidad de convergencia con la malla B , frente a las obtenidas con las mallas A y C ; la velocidad de convergencia de la malla B es prácticamente el doble de las velocidades de las mallas A y C y aproximadamente 3.4 veces superior a la convergencia h -completa. Además, se observa que los refinamientos cúbicos y superiores no se deterioran en la malla B como ocurre con las mallas A y C , lo cual conduce a refinamientos aún más efectivos en la presencia de singularidades.

Placa con fisura

El ejemplo que se estudia es clásico en el ámbito de la mecánica de fractura (Broek⁷): determinación de las tensiones en recintos elásticos que presentan fisuras interiores. La Figura 6.a ilustra una placa elástica sometida a tracciones constantes a lo largo de uno de sus ejes y con una fisura de longitud igual a la mitad del lado. Las oportunas consideraciones de simetría permiten simplificar convenientemente el recinto, como ilustra la Figura 6.b, y donde ahora se imponen las condiciones de contorno derivadas del uso de la simetría.

Este ejemplo fue analizado utilizando dos mallas "base": una malla A definida con cinco macroelementos (Figura 6.b) y una malla B definida con cinco macroelementos y un elemento pequeño en la vecindad del punto singular S , como muestra la Figura 6.c. Adicionalmente, se practicó un refinamiento h -isótropo sobre la malla A . La Figura 7 compara las velocidades de convergencia de la placa con fisura para los dos tipos de refinamiento.

Otra vez aquí, y de acuerdo a la discusión en el caso de la ménsula corta, la velocidad de convergencia obtenida mediante refinamiento p -adaptado sobre la malla B proporciona un valor de 1.50 el cual resulta ser 3.0 veces mayor que el correspondiente al refinamiento h . No ocurre lo mismo con el refinamiento p -adaptado sobre la malla A , el cual no exhibe prácticamente ninguna mejora sobre el refinamiento h . Este hecho es debido a que la singularidad S (Figura 6.b) condiciona fuertemente el comportamiento del refinamiento p no permitiendo un adecuado ajuste polinómico, fundamentalmente sobre el elemento 2. Sin embargo, la inclusión de un elemento pequeño en la vecindad del punto S "libera" el desarrollo de la singularidad, permitiendo así un adecuado ajuste polinómico sobre el elemento de interés (elemento 3 en Figura 6.c).

Por otro lado, parece interesante evaluar el factor de concentración de tensiones correspondiente al primer modo de apertura de fisura. En la literatura técnica (véase por ejemplo Broek⁷) se encuentran expresiones apropiadas para evaluar la evolución de las tensiones en la vecindad de la "cabeza de fisura". Así pues, la evolución de la tensión σ_2 se puede expresar por (despreciando términos de orden superior)

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (8)$$

donde r es el radio vector desde la "cabeza de fisura" hasta el punto en consideración, el ángulo θ se mide antihorario entre el eje horizontal y el vector r y K_I es el factor de concentración de tensiones para el primer modo de apertura de fisura cuyo valor depende de la geometría de la placa y de la fisura y de las condiciones de contorno (véase por ejemplo Rooke et al.²³). Conocido el valor de la tensión σ_2 de la solución numérica, puede determinarse numéricamente el valor del K_I haciendo $\theta = 0$ en la expresión (8), la cual queda

$$K_I = \sigma_2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (9)$$

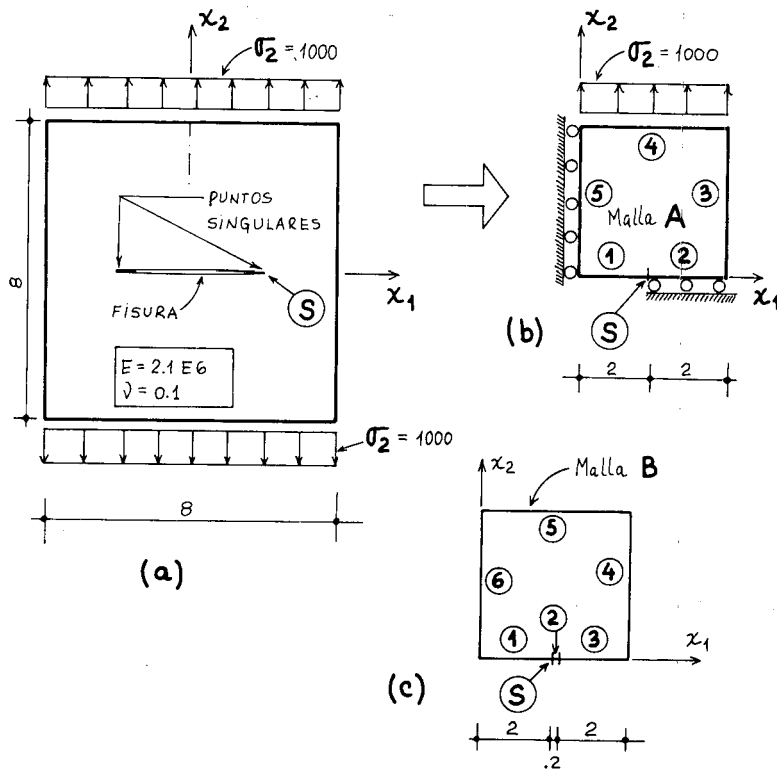


Figura 6. a) Geometría y condiciones de contorno. Placa fisurada. b) Modelo simplificado de placa fisurada: Malla A. c) Discretización alternativa de placa con fisura: Malla B.

La Figura 8 muestra la evolución de la expresión (9) en función de r , en la región cercana a la "cabeza de fisura". El valor buscado de K_I se obtiene extrapolando la parábola que mejor ajuste los valores obtenidos hasta su intersección con la recta $r = 0$

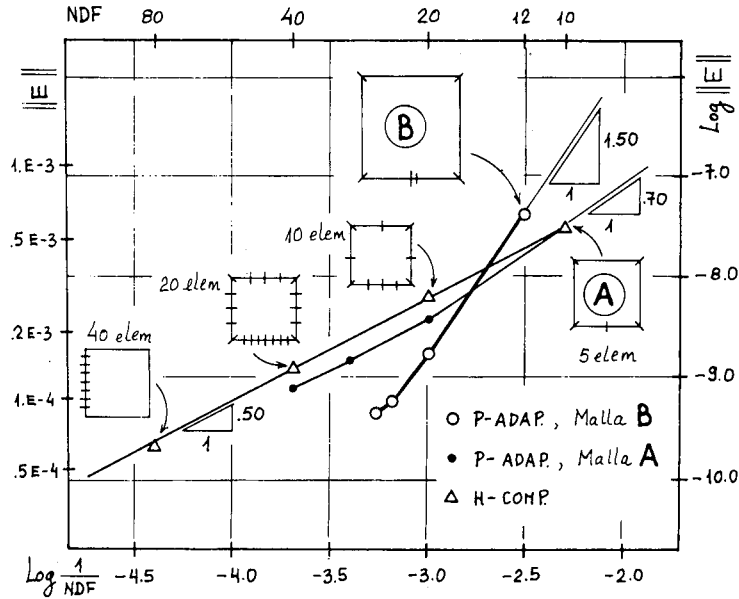


Figura 7. Comparación de velocidades de convergencia. Placa con fisura.

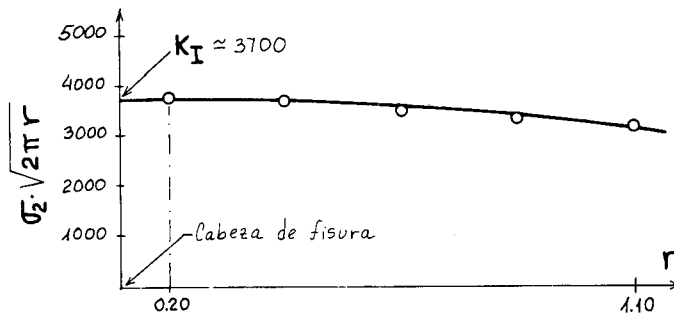


Figura 8. Determinación del factor de concentración de tensiones K_I . Placa con fisura.

El valor obtenido de la figura anterior es de $K_I = 3700$, el cual compara bastante bien con el valor teórico de 3510, obteniéndose un error relativo aproximado del 5%.

CONCLUSIONES

La potencia y versatilidad de la versión p-adaptable del MEC ha quedado de manifiesto en la discusión de los ejemplos presentados.

Pueden ser analizados recintos problemáticos con un mínimo de esfuerzo humano y computacional, aún en la presencia de singularidades fuertes.

Se han desarrollado códigos computacionales totalmente interactivos y "amigables" hacia el usuario, los cuales permiten efectuar un "seguimiento" del proceso de refinamiento.

Los criterios matemáticos necesarios para controlar la versión p-adaptable desarrollada han demostrado un comportamiento realmente satisfactorio.

AGRADECIMIENTOS

Parte de esta investigación ha sido posible gracias al apoyo suministrado por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH, Venezuela) y por el Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI, España).

REFERENCIAS

1. E. Alarcón y A. Reverter, "P-adaptive Boundary Elements", *Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. **23**, pp. 801-82, (1984).
2. E. Alarcón, A. Reverter y J. Molina, "Hierarchical Boundary Elements", *Computers & Structures*, Vol. **20**, pp. 151-156, (1986).
3. I. Babūška y W.C. Rheinboldt, "Error estimates for adaptive Finite Element computations", *Siam J. Numer. Anal.*, Vol. **15**, No. 4, pp. 736-754, (1978).
4. I. Babūška y A. Miller, "A posteriori error estimates and adaptive techniques for the Finite Element Method", *Tech. Note Bn-968*, Inst. for Phys. Science and Tech., Univ. of Maryland, (1981).
5. I. Babūška, O.C. Zienkiewicz y J. Gago, "Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element comput", John Wiley & Sons, (1986).
6. C.A. Brebbia, J.C. Telles y L.C. Wrobel, "Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Eng.", Springer-Verlag, Berlín, (1984).
7. D. Broek, "Elementary Engineering Fracture Mechanics II", Martinus Nijhoff Publis., 4a. Ed., (1986).
8. M. Cerrolaza y E. Alarcón, "P-adaptive Boundary Elements for three dimensional potential problems", *Comm. Applied Num. Met.*, Vol. **3**, pp. 335-345, (1987).
9. M. Cerrolaza, M.S. Gomez y E. Alarcón, "Elastostatics p-adaptive Boundary Elements for Micros", *Soft. for Eng. Workstations*, Vol. **4**, no. 1, pp. 18-24, (1988).
10. M. Cerrolaza y E. Alarcón, "A bicubic coordinate transformation for the evaluation of the Cauchy Princial Value integrals", *Int. J. Num. Met. Eng.*, (sometido para publicación), (1988).
11. M. Cerrolaza, "Elementos de Contorno p-adaptables: desarrollo y aplicaciones en teoría del Potencial y Elastostática", *Tesis Doctoral*, Madrid, ETSII-UPM, (1988).
12. J.P. Gago, "A posteriori error analysis and adaptivity for the FEM", *PhD. Tesis*, University of Wales, Swansea, (1982).
13. J.P. Gago, D.W. Kelly y O.C. Zienkiewicz, "H-and P-adaptive finite element schemes: an analysis and applic.", *Proc. 4th Int. Conf. on FEM*, Univ. of Melbourne, Australia, (1982).
14. M.S. Gomez, M. Cerrolaza y E. Alarcón, "Adaptive refinements in Boundary Element Methods", *Proc. IX Int. Conf. on BEM*, Sttutgart (Springer Eds.), Berlín, (1987).
15. P. Parreira, "Self-adaptive p-hierarchical boundary elem. in elastostatics", *Proc. IX Int. Conf. on BEM*, Sttutgart, (Springer Eds.), Berlín, (1987).
16. P. Parreira, "Analise do erro no método dos elementos de fronteira em elasticidade", *Tesis Doctoral*, Univ. Técnica de Lisboa, (1988).

17. A.G. Peano, "Hierarchy of conforming finite elements", *Doctoral Dissertation*, Washington Univ. St. Louis, (1975).
18. A.G. Peano, A. Passini, R. Riccioni y L. Sardella, "Adaptive approximation in finite element structural analysis", *Comp. and Struct.*, Vol. 10, pp. 332-342, (1979).
19. E. Rank, "A posteriori Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite Element und Randintegralelement-Methoden", *PhD. Thesis*, Univ. of Munich, Munich, (1985).
20. E. Rank, "Adaptive Boundary Element Methods", *Proc. IX Int. Conf. on BEM*, Stuttgart (Springer Eds.), Berlín, (1987).
21. J.N. Reddy, "An introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill Book, Co-Singapore, (1984).
22. J.J. Rencis y R.L. Mullen, "Solution of elasticity problems by a self-adaptive mesh refinement technique for boundary Element computation", *Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. 23, pp. 1509-1527, (1986).
23. D.P. Rooke y D.J. Cartwright, "Compendium of stress intensity factors", *Procurement executive*, Ministry of Defence, London, (1976).
24. A.H. Stroud y D. Secrest, "Gaussian Quadrature formulas", Prentice-Hall, New York, (1966).
25. J.C. Telles, "A self adaptive coordinate transformation for the efficient evaluation of general Boundary element integrals", *Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. 24, pp. 959-973, (1987).
26. O.C. Zienkiewicz y K. Morgan, "Finite Elements and approximation", John Wiley & Sons, New York, (1983).